

## Моделирование предпробойных явлений в микровыступе на катоде в СВЧ полях с учетом движения расплава

И. Уйманов<sup>1,\*</sup>, Д. Шмелев<sup>1</sup>, С. Баренгольц<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

<sup>2</sup>Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия

<sup>3</sup>Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

\*uimanov67@yandex.ru

**Абстракт.** Разработана самосогласованная двумерная осесимметричная модель, описывающая нагрев микровыступа и динамику формы его вершины после плавления в СВЧ поле. Модель включает в себя расчет напряженности электрического поля и эмиссионных характеристик на “эмиссионной” полуволне СВЧ волны методом “частицы в ячейке” (PIC) с учетом объемного заряда эмитированных электронов, и с момента плавления вершинной части микровыступа описывает движение жидкой фазы под действием сил со стороны электрического поля и сил поверхностного натяжения. Проведено моделирование разогрева микровыступа до критической температуры и изменения формы его вершинной части с начальным коэффициентом усиления напряженности электрического поля  $\beta_m \sim 86$  в СВЧ волне с модулем напряженности 250 МВ/м и частотой 10 ГГц. Показано, что время развития тепловой неустойчивости при вытягивании и заострении микровыступа в расплавленном состоянии существенно ниже, чем в случае неизменной формы микровыступа. При этом эмиссионный источник выделения тепла (эффект Ноттингема) всегда остается греющим, а максимальная температура достигается на поверхности вершины микровыступа.

**Ключевые слова:** вакуумный пробой, СВЧ пробой, термоавтоэлектронная эмиссия

### 1. Введение

Взрыв микровыступов на катоде рассматривается как основной механизм вакуумного пробоя как в постоянных импульсных, так и в радиочастотных электрических полях [1–4]. Интерес к исследованию механизма радиочастотного вакуумного пробоя возник в связи с развитием мощной импульсной микроволновой электроники [5]. Радиочастотный вакуумный пробой является одной из основных причин эффекта «укорочения длительности» импульса мощного СВЧ излучения [6]. Преодоление этого эффекта позволило бы существенно увеличить эффективность использования энергии сильноточных электронных пучков для генерации микроволнового излучения. В последние годы интерес к явлению радиочастотного вакуумного пробоя резко возрос в связи с разработкой электрон-позитронных коллайдеров [7]. Радиочастотный вакуумный пробой на поверхности ускоряющей структуры является основной причиной, препятствующей увеличению градиента ускорения частиц [8]. В настоящее время можно с уверенностью утверждать, что в основе наносекундного радиочастотного вакуумного пробоя и импульсного вакуумного пробоя лежит единый механизм, связанный с микровзрывными процессами на поверхности электродов под действием тока взрывной электронной эмиссии [9, 10]. Об этом свидетельствует, прежде всего, наличие идентичных следов поражения поверхности электродов – кратеров микрометрового размера на поверхности. Экспериментально установлен рост вероятности пробоя с увеличением разогрева поверхности ускоряющей структуры под действием СВЧ поля [11]. Проведенные нами расчеты показали, что при росте начальной температуры микроострия до 1000 К, время его разогрева протекающим током автоэлектронной эмиссии до критической температуры снижается в 1.5–2 раза в зависимости от плотности тока [12].

Однако, в известных нам подходах, рассмотрение предвзрывных явлений в микровыступе не учитывало динамику формы микровыступа после его плавления. С целью исследования этих процессов в данной работе разработана двумерная осесимметричная

самосогласованная модель нагрева микровыступа с учетом изменения его формы после плавления под действием СВЧ поля и сил поверхностного натяжения.

## 2. Описание модели

### 2.1. Постановка задачи

Модельная геометрия задачи представлена на Рис.1. Конический микровыступ высотой  $h_m$ , с полууглом раствора  $\alpha$  и радиусом вершины  $r_m$  находится в гармоническом электрическом поле СВЧ волны амплитудой  $E_w = 250$  МВ/м и частотой  $\omega = 10$  ГГц. Во время “эмиссионного” полупериода за счет усиления напряженности поля на вершине микровыступа возникает ток электронной эмиссии. В свою очередь объемный заряд эмитированных электронов экранирует электрическое поле на поверхности микровыступа. Появление эмиссионного тока сопровождается выделением энергии в микровыступе как за счет объемного Джоулева источника тепла, так и за счет кинетического поверхностного источника тепла (эффект Ноттингема). В силу резкой зависимости плотности тока электронной эмиссии от напряженности поля, требуется проведение самосогласованного расчета плотности эмиссионного тока, плотности объемного заряда, напряженности электрического поля при моделировании разогрева микроострия. Разогрев микровыступа приводит к появлению расплава в вершинной части, свободная поверхность которого оказывается под давлением со стороны электрического поля  $P_E = -\epsilon_0 E^2/2$  и давлением сил поверхностного натяжения  $P_C = \gamma C$ . Движение расплава описывается системой уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью.

### 2.2. Математическая модель

В рамках разработанной модели потенциал электрического поля  $U(r, z)$  рассчитывается из уравнения Пуассона в двумерной цилиндрической системе координат:

$$\Delta U(r, z) = -4\pi\rho(r, z), \quad (1)$$

где  $\rho$  – объемный заряд эмитированных электронов.

Уравнение (1) решается численно в расчетной области  $r_d = z_d = 10$  мкм (см. Рис.1). Потенциал микровыступа полагается нулевым, на левой и правой границе  $\partial U/\partial r (r=0, r=r_d) = 0$ , а на верхней границе  $z = z_d$  задается  $-\partial U/\partial z = E_{RF}$ . Для определения  $\rho(r, z)$  рассчитываются траектории движения электронов (суперчастиц) в самосогласованном поле  $\vec{E}(r, z) = -\vec{\nabla}U(r, z)$  из уравнений Ньютона:

$$\begin{aligned} z &= z_0 + v_z^0 \Delta t, & r &= r_0 + v_r^0 \Delta t, \\ v_z &= v_z^0 + \frac{e}{m} E_z(r, z) \Delta t, & v_r &= v_r^0 + \frac{e}{m} E_r(r, z) \Delta t, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $z_0, r_0$  и  $z, r$  координаты частицы до и после шага по времени  $\Delta t$ ,  $v_z^0, v_r^0$  и  $v_z, v_r$  – компоненты скорости частицы до и после  $\Delta t$ ,  $E_z = -dU/dz$  и  $E_r = -dU/dr$  – компоненты напряженности электрического поля,  $e$  и  $m$  – заряд и масса электрона, соответственно. Частицы стартуют с поверхности микровыступа на каждом шаге по времени в результате термоавтоэлектронной эмиссии (TFE). Используется PIC схема суперчастиц с различным зарядом  $q_p$ . Этот заряд определяется при рождении частицы выражением  $q_p = j_{FE} \Delta S_i \Delta t$ , где  $j_{FE}$  плотность тока TFE,  $\Delta S_i$  – элементарная площадка эмитирующей поверхности с которой стартует частица,  $\Delta t$  – шаг по времени.

Плотность тока TFE  $j_{FE}$  рассчитывается в приближении Миллера-Гуда:

$$j_{FE} = \frac{4\pi me}{h^3} \int_0^\infty d\varepsilon \int_0^\varepsilon d\varepsilon_n f_{FD}(\varepsilon) D(E_c, \varepsilon_n), \quad (3)$$

где  $D(E_c, \varepsilon_n)$  – коэффициент прозрачности потенциального барьера,  $E_c$  – напряженность поля у поверхности микровыступа,  $\varepsilon = (\hbar k)^2/2m$  – энергия электрона в металле в состоянии с волновым вектором  $k$ ,  $\varepsilon_n = (\hbar k_n)^2/2m$  – “нормальная к барьеру” энергия электрона,  $h$  ( $\hbar = h/2\pi$ ) – постоянная Планка. Мы полагаем, что распределение электронов по энергиям определяется равновесной функцией Ферми-Дирака  $f_{FD}(\varepsilon) = \{1 + \exp((\varepsilon - \varepsilon_F)/k_B T_e)\}^{-1}$ , где  $\varepsilon_F$  – энергия Ферми,  $k_B$  – постоянная Больцмана. В рамках приближения Миллера-Гуда выражение для  $D(E_c, \varepsilon_n)$  можно записать в следующем виде:

$$D(E_c, \varepsilon_n) = \begin{cases} [1 + \exp(Q(E_c, \varepsilon_n))]^{-1}, & \varepsilon_n < \varepsilon_L, \\ 1, & \varepsilon_n > \varepsilon_L \end{cases}, \quad (4)$$

$$Q(E_c, \varepsilon_n) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left( \frac{m^2 e^5}{\hbar^4 E_c} \right)^{1/4} y^{-3/2} \mathfrak{v}(y), \quad (5)$$

$$y = \sqrt{e^3 E_c} / |\varepsilon_F + \phi - \varepsilon_n|, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_L = \varepsilon_F + \phi - (e^3 E_c/2)^{1/2}$ ,  $\phi$  – работа выхода, а функция  $\mathfrak{v}(y)$  определяется через эллиптические интегралы.

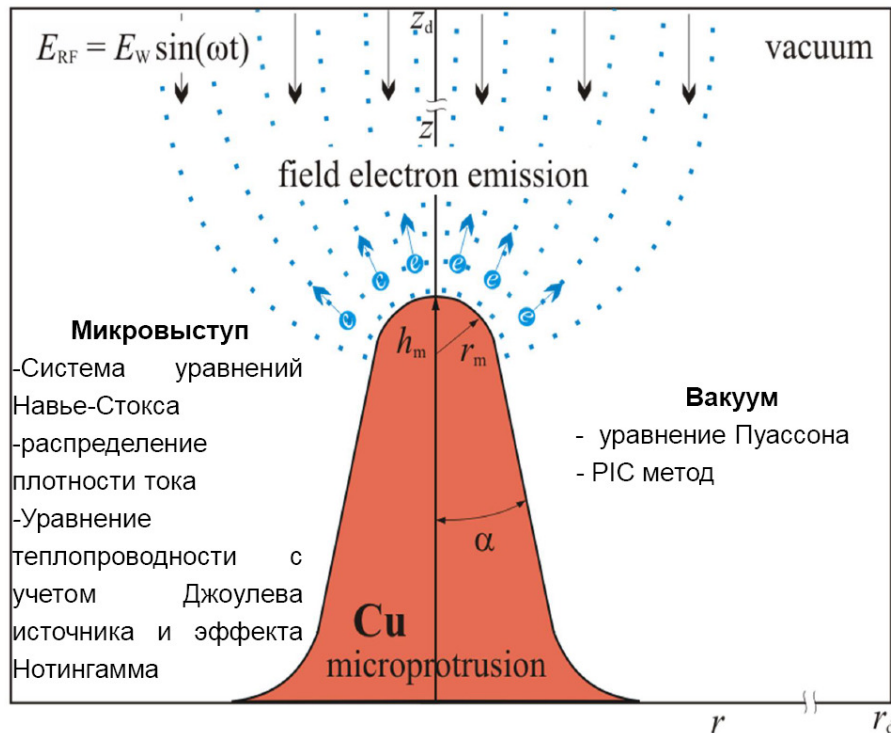


Рис.1. Модельная геометрия задачи.

Движение расплава описывается системой уравнений Навье-Стокса для вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial r'} + v' \frac{\partial u'}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r'} + \nu \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial r'^2} + \frac{\partial}{\partial r'} \left( \frac{u'}{r'} \right) + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial r'} + v' \frac{\partial v'}{\partial z'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z'} + \nu \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial v'}{\partial r'} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right), \quad (8)$$

и уравнения непрерывности, обеспечивающее условие несжимаемости:

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} (r' u') + \frac{\partial v'}{\partial z'} = 0. \quad (9)$$

Здесь  $\vec{V}' = \langle u', v' \rangle$  – гидродинамическая скорость расплава, имеющего температуру  $T$ ,  $\rho = \rho(T_j)$  – плотность, и  $\nu = \nu(T_j)$  – кинематическая вязкость. Уравнения (7)–(9) решаются численно с помощью проекционного метода. В рамках такого подхода необходимо решать уравнение Пуассона для давления на каждом шаге по времени. Для этого используются следующее граничное условие Дирихле для давления на свободной поверхности:

$$p|_{\Omega_{FS}} = p + \gamma C + 2\nu\rho \left[ \frac{\partial u'}{\partial r'} N_{r'}^2 + \frac{\partial v'}{\partial z'} N_{z'}^2 + \left( \frac{\partial v'}{\partial r'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \right) N_{r'} N_{z'} \right], \quad (10)$$

где  $\gamma = \gamma(T_j)$  коэффициент поверхностного натяжения,  $C$  – кривизна свободной поверхности расплава, и  $\vec{N} = \langle N_{r'}, N_{z'} \rangle$  – единичный вектор нормали к свободной поверхности. Для расчета движения фронта жидкости используется “particle level set function” метод [13].

Для расчета распределения плотности тока в микровыступе  $j = -\sigma \nabla U_\Omega$ , решается уравнение Лапласа на омический потенциал  $U_\Omega$ :

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \sigma \frac{\partial U_\Omega}{\partial r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left( \sigma \frac{\partial U_\Omega}{\partial z'} \right) = 0, \quad (11)$$

с граничными условиями:

$$-\nabla U_\Omega|_S = j_s / \sigma, \quad \sigma \frac{\partial U_\Omega}{\partial r'} (r' = 0) = 0, \quad U_\Omega(z' = 0) = 0, \quad (12)$$

где  $\sigma$  – электропроводность расплава, зависящая от температуры.

Температура микровыступа  $T(r', z', t)$  рассчитывается на основе уравнения теплопроводности с учетом конвективного переноса тепла, эффекта Джоуля и эффекта Ноттингема:

$$c\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}' \nabla T \right) = \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \lambda \frac{\partial T}{\partial r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z'} \right) + \frac{j^2}{\sigma}. \quad (13)$$

### 3. Результаты моделирования

Расчеты проводились для медного микровыступа с радиусом вершины  $r_m = 2 \cdot 10^{-8}$  м, высотой  $h_m = 2 \cdot 10^{-6}$  м и  $\alpha = 2^\circ$  (см. Рис.1). Задавалось гармоническое СВЧ поле с амплитудой напряженности  $E_w = 250$  МВ/м и частотой  $w = 10$  ГГц. Коэффициент усиления напряженности электрического поля на вершине такого микровыступа составляет  $\beta_m = 86.5$ . На Рис.2 представлена динамика разогрева микровыступа, как с учетом изменения формы вершины после плавления (красная кривая), так и при неизменной форме микровыступа

(синия кривая). Последний случай детально нами исследовался в двухтемпературном приближении в [12, 14]. Как видно из Рис.2, на первой стадии до появления расплава температурные кривые совпадают. Здесь разогрев микровыступа практически целиком определяется выделением тепла за счет эмиссионного источника энергии – эффекта Ноттинггема на “положительной” полуволне. В течение отрицательной полуволны происходит отвод тепла от вершины к основанию микровыступа за счет теплопроводности. Рост температуры микровыступа с течением времени усиливается уже за счет Джоулева разогрева. Однако после нагрева вершины микровыступа выше температуры плавления картина развития тепловой неустойчивости в рассматриваемых случаях существенно различаются.

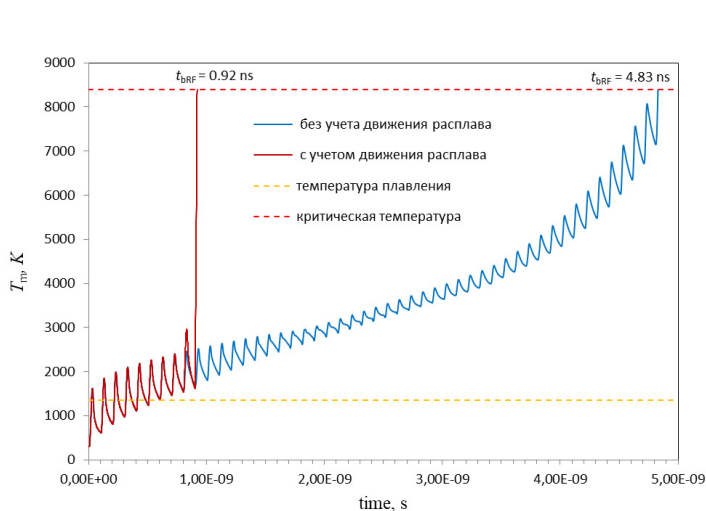


Рис.2. Динамика разогрева микровыступа до критической температуры в СВЧ поле без учета движения расплава (синия кривая) и с учетом изменения формы вершины микровыступа после плавления (красная кривая).

Расчетные параметры:  $r_m = 2 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ ,  $h_m = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ ,  $\alpha = 2^\circ$  ( $\beta_m = 86,5$ ),  $E_w = 250 \text{ МВ/м}$ ,  $w = 10 \text{ ГГц}$ .

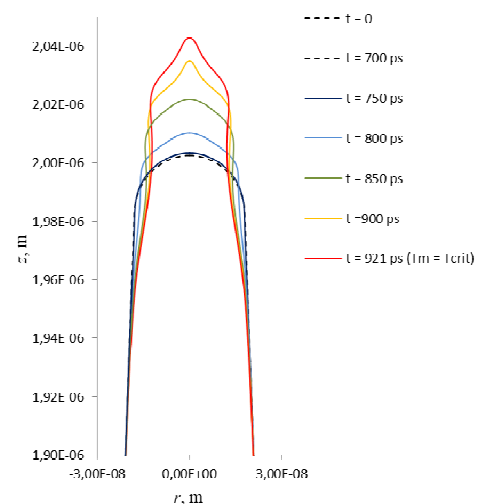


Рис.3. Динамика формы микровыступа после плавления. Временная зависимость напряженности электрического поля  $E$  и плотности тока  $j$  на вершине микровыступа. Временная зависимость напряженности электрического поля  $E$  и плотности тока  $j$  на вершине микровыступа. Временная зависимость напряженности электрического поля  $E$  и плотности тока  $j$  на вершине микровыступа. Временная зависимость напряженности электрического поля  $E$  и плотности тока  $j$  на вершине микровыступа.

Так при неизменной форме микровыступа время развития тепловой неустойчивости  $t_{\text{BRF}}$  составляет 4.83 нс. В случае учета движения расплава под действием сил со стороны электрического поля и поверхностного натяжения это существенно меньше и составляет 0.92 нс от начала нагрева и 220 пс от момента плавления вершины микровыступа. На Рис.3 представлена динамика изменения формы вершинной части микровыступа после появления расплава ( $t_m = 700 \text{ пс}$ ) под воздействием переменного гармонического электрического поля. Временная зависимость напряженности электрического поля и плотности тока электронной эмиссии на вершине микровыступа показана на Рис.4. Как видно из приведенных рисунков, после плавления вершина микровыступа в электрическом поле начинает вытягиваться и заостряться. Это приводит к существенному росту напряженности электрического поля и плотности тока электронной эмиссии (см. Рис.4). Так что в начале положительной полуволны ( $t = 900 \text{ пс}$ ) максимальная температура в микровыступе лишь немного превышает температуру плавления, развитие тепловой неустойчивости происходит очень быстро на первой четверти эмиссионной полуволны при плотностях тока  $1 \cdot 10^{10} - 4 \cdot 10^{10} \text{ А/см}^2$ . При этом за счет резкого роста напряженности поля эмиссионный источник выделения тепла (эффект Ноттинггамма) всегда остается греющим. Это приводит к тому, что максимальная температура находится на поверхности, а не в глубине вершины (см. Рис.5).

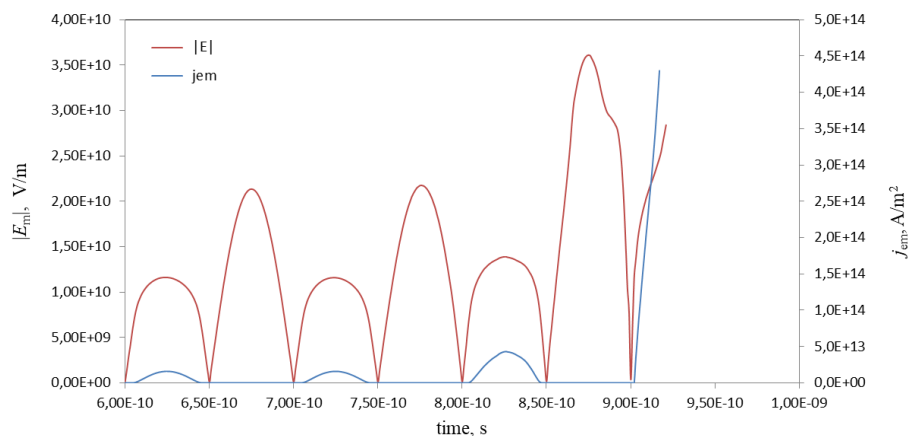


Рис.4. Временная зависимость напряженности электрического поля и плотности тока электронной эмиссии на вершине микровыступа. Время появления расплава  $t_m = 700$  пс. Расчетные параметры:  $r_m = 2 \cdot 10^{-8}$  м,  $h_m = 2 \cdot 10^{-6}$  м,  $\alpha = 2^\circ$  ( $\beta_m = 86.5$ ),  $E_w = 250$  МВ/м,  $w = 10$  ГГц.

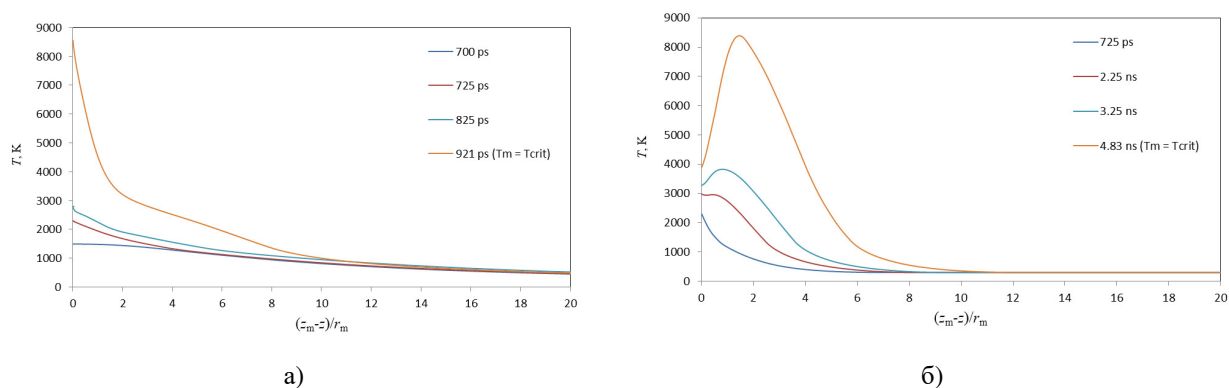


Рис.5. Распределение температуры вдоль микровыступа (ось  $z$ ) в различные моменты времени с учетом изменения формы вершины – а); в статичном случае – б). Время появления расплава  $t_m = 700$  пс. Расчетные параметры:  $r_m = 2 \cdot 10^{-8}$  м,  $h_m = 2 \cdot 10^{-6}$  м,  $\alpha = 2^\circ$  ( $\beta_m = 86.5$ ),  $E_w = 250$  МВ/м,  $w = 10$  ГГц.

#### 4. Выводы

Разработана двумерная осесимметричная модель развития тепловой и электрогидродинамической неустойчивости в микровыступе, расположенном на стенке СВЧ структуры. Модель включает в себя самосогласованный расчет напряженности электрического поля и эмиссионных характеристик на “эмиссионной” полуволне СВЧ волны. С момента появления расплава в вершинной части микровыступа, модель описывает движение жидкой фазы под действием сил со стороны электрического поля (Maxwell stress) и сил поверхностного натяжения. Проведено самосогласованное моделирование изменения формы вершинной части микровыступа с начальным коэффициентом усиления напряженности электрического поля  $\beta_m \sim 86$  и его разогрева в СВЧ волне с модулем напряженности 250 МВ/м и частотой 10 ГГц. Показано, что время развития тепловой неустойчивости при вытягивании и заострении микровыступа в расплавленном состоянии существенно ниже, чем в случае неизменной формы микровыступа. Так, при неизменной форме микровыступа время развития тепловой неустойчивости  $t_{bRF}$  составляет 4.83 нс. В случае учета движения расплава под действием сил со стороны электрического поля и поверхностного натяжения это существенно меньше и составляет 0.92 нс от начала нагрева и 220 пс от момента плавления вершины микровыступа. После плавления вершина микровыступа в электрическом поле начинает вытягиваться и заостряться. Это приводит к

резкому росту напряженности электрического поля и плотности тока электронной эмиссии. При этом эмиссионный источник выделения тепла (эффект Ноттингамма) всегда остается греющим, а максимальная температура достигается на поверхности вершины вытягивающегося и заостряющегося микровыступа.

### Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-19-00323).

### 5. Список литературы

- [1] Mesyats G.A., Proskurovsky D.I., *Pulsed Electrical Discharge in Vacuum*. (Berlin: Springer, 1989).
- [2] Mesyats G.A., *Cathode Phenomena in a Vacuum Discharge: The Breakdown, the Spark and the Arc*. (Moscow: Nauka, 2000).
- [3] Barengolts S.A., Kreindel M.Y., Litvinov E.A., *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **26**(3), 252, 1998; doi: 10.1109/27.700751
- [4] Barengolts S.A., et al., *Phys. Rev. Accel. Beams*, **21**(6), 061004, 2018; doi: 10.1103/PhysRevAccelBeams.21.061004
- [5] Mesyats G.A., *Pulsed Power*, (New York: Springer Science & Business Media, 2007); url: <https://download.e-bookshelf.de/download/0000/0000/73/L-G-0000000073-0002330886.pdf>
- [6] Agee F.J., *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **26**, 235, 1998; doi: 10.1109/27.700749
- [7] Aicheler M., et al., *A Multi-TeV linear collider based on CLIC technology: CLIC Conceptual Design Report*. (CERN-2012-007, 2012).
- [8] Wuensch W., *Advances in the understanding of the physical processes of vacuum breakdown*, (CERN-OPEN-2014-028, CLIC-Note-1025, 2013).
- [9] Mesyats G.A., *High Power Microwave Generation and Applications*, (Bologna: SIF, 1992).
- [10] Barengolts S.A., Mesyats V.G., Oreshkin V.I., Oreshkin E.V., Khishchenko K.V., Uimanov I.V., Tsventoukh M.M., *Phys. Rev. Accel. Beams*, **21**, 061004, 2018; doi: 10.1103/PhysRevAccelBeams.21.061004
- [11] Simakov E.I., Dolgashev V.A., Tantawi S.G., *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A*, 907 221, 2018; doi: 10.1016/j.nima.2018.02.085
- [12] Uimanov I.V., Shmelev D.L., Barengolts S.A., *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **54**, 065205, 2020; doi: 10.1088/1361-6463/abc213
- [13] Enright D., Fedkiw R., Ferziger J., Mitchell I., *J. Comput. Phys.*, **183**(1), 83, 2002; doi: 10.1006/jcph.2002.7166
- [14] Barengolts S.A., Uimanov I.V., Shmelev D.L., *IEEE Transaction on Plasma Science*, **47**(8), 3400, 2019; doi: 10.1109/TPS.2019.2914562.