

Оптимизация передачи энергии из LC-контура в кинетическую энергию металлической токонесущей пластины

А.В. Козырев^{}, А.А. Жерлицын*

Институт сильноточной электроники СО РАН, Томск, Россия

**kozzyrev56@bk.ru*

Аннотация. Выполнен анализ эффективности передачи энергии емкостного накопителя в кинетическую энергию токонесущей пластины (плоского лайнера). Анализ проводился в рамках математической модели из двух уравнений: уравнения для тока LC-контура и уравнения одномерного движения лайнера. Показано, что при фиксированной финальной индуктивности лайнера эффективность передачи энергии зависит от единственного безразмерного параметра, пропорционального начальному заряду емкостного накопителя, и имеет единственное оптимальное значение.

Ключевые слова: индукционное ускорение тел, индуктивная нагрузка, рельсотрон, плоский лайнер.

1. Введение

Хорошо известны методы электродинамического ускорения металлических предметов до гиперзвуковых скоростей (порядка 10 км/с), которые используются при проведении ударно-волновых экспериментов. Простейшим из таких устройств является так называемый «рельсотрон» (его идеализированная схема показана на Рис.1), в котором через проводящий объект пропускают ток, создающий собственное магнитное поле, ускоряющее этот токопроводящий объект силой Ампера.

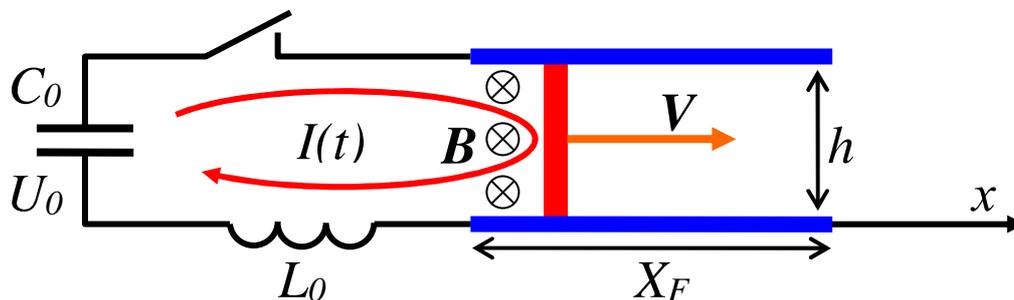


Рис.1. Схема «рельсотрона» и обозначения параметров задачи.

Естественно, что кинетическая энергия объекта будет определяться целым рядом параметров, главным из которых является начальный энергозапас емкостного накопителя. В этой задаче встает вопрос: какая максимальная доля этого энергозапаса может быть переведена в полезную нагрузку – кинетическую энергию движущегося объекта? Поиску общего ответа на этот вопрос и выбору оптимальных режимов процесса применительно к прямолинейному движению плоской проводящей пластины посвящена данная работа.

Подобные задачи уже решались применительно к вводу энергии из передающей линии в проволочный лайнер [1] и из емкостного накопителя в кинетическую энергию цилиндрической проводящей оболочки при имплозии плазменного лайнера [2]. С упомянутыми выше задачами нашу нелинейную задачу объединяет то важное свойство, что нагрузкой генератора тока является переменная индуктивность, обусловленная движением токонесущего объекта. Такая постановка задачи, пренебрегающая активными потерями в контуре, вполне справедлива, если волновое сопротивление колебательного контура много больше активного сопротивления потерь, а процесс ускорения полностью укладывается в первую полуволну тока.

2. Математическая модель процесса

Идеализированная схема индукционного ускорения плоской пластины (плотность материала ρ , толщина пластины δ) с геометрическими размерами $h \times l$ под действием протекающего через пластину тока $I(t)$ приведена на Рис.1. Внутри петли тока создается сильное магнитное поле с индукцией $B(t)$, давление которого ускоряет первоначально покоящуюся проводящую пластину до скорости $V(t)$. Длину X_F , на которой происходит ускорение, в задаче будем считать фиксированной.

Полагаем, что ток однородно распределен по поперечному сечению пластины, а магнитный поток также однороден внутри петли тока. Тогда магнитная индукция $B(t)$, магнитный поток в петле Φ_m и индуктивность токового контура $L(t)$ будет иметь величину:

$$B(t) = \mu_0 \frac{I(t)}{l}, \quad \Phi_m = B(t)h \cdot (X_0 + X(t)) = L(t) \cdot I(t), \quad L(t) = L_0 + \mu_0 \frac{h}{l} X(t). \quad (1)$$

Здесь $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Под фиксированной индуктивностью L_0 ниже мы будем понимать начальную (до начала движения листа) индуктивность всего электрического контура, а индуктивность $L'(t) = \mu_0(h/l)X(t)$ будем считать индуктивностью полезной нагрузки, которая в начале движения равна нулю.

Масса ускоряемого листа $M = \rho \delta h l$ в рамках нашей модели ускорения считается фиксированной, магнитным полем за пределами токовой петли мы пренебрегаем, тогда уравнение движения пластины под действием магнитного давления будет таким

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{B^2(t)}{2\mu_0} h l, \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{1}{2M} \mu_0 \frac{h}{l} I^2(t), \quad (2)$$

которое может быть переписано как уравнение эволюции индуктивности полезной нагрузки с естественными начальными условиями для первоначально покоящегося объекта:

$$\frac{d^2 L'}{dt^2} = \frac{1}{2M} \left(\mu_0 \frac{h}{l} I(t) \right)^2, \quad L'(0) = 0, \quad \left(\frac{dL'}{dt} \right)_0 = 0. \quad (3)$$

Уравнение Кирхгофа для разрядного тока в контуре:

$$\frac{d}{dt}(LI) = U(t) = U_0 - \frac{1}{C_0} \int_0^t I dt, \quad \frac{d^2}{dt^2}(LI) + \frac{I}{C_0} = 0. \quad (4)$$

Поставляя сюда индуктивность из (1) и используя выражение (3), после раскрытия дифференцирования в первом слагаемом левой части (4) можно записать итоговое уравнения для разрядного тока и начальные условия для него:

$$(L_0 + L') \frac{d^2 I}{dt^2} + 2 \frac{dL'}{dt} \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{1}{2M} \left(\mu_0 \frac{h}{l} \right)^2 I^3 + \frac{I}{C_0} = 0, \quad I(0) = 0, \quad \left(\frac{dI}{dt} \right)_0 = \frac{U_0}{L_0}. \quad (5)$$

Система двух уравнений – для индуктивности нагрузки L' (3) и для тока в контуре I (5) – полностью описывает протекание процесса.

Для удобства предварительного анализа и упрощения математической задачи целесообразно перейти к безразмерным переменным. Для начала введем интуитивно понятные масштабы времени и индуктивности полезной нагрузки, а безразмерные переменные обозначим греческими буквами:

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{L_0 C_0}}, \quad \lambda = \frac{L'}{L_0} = \frac{\mu_0}{L_0} \frac{h}{l} X. \quad (6)$$

В этих же масштабах времени и индуктивности нагрузки L' получим масштаб тока, который полностью обезразмеривает уравнение (3):

$$\frac{d^2 \lambda}{d\tau^2} = \eta^2, \quad \lambda(0) = 0, \quad \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)_0 = 0, \quad \eta = \mu_0 \frac{h}{l} I \sqrt{\frac{C_0}{2M}}. \quad (7)$$

Если теперь переписать уравнение (5) для тока в новых безразмерных параметрах, то получим «токовое» безразмерное уравнение (8), а единственный (!) параметр задачи, u , будет входить только в начальные условия для производной безразмерного тока:

$$(1 + \lambda) \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} + 2 \frac{d\lambda}{d\tau} \frac{d\eta}{d\tau} + \eta^3 + \eta = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \left(\frac{d\eta}{d\tau} \right)_0 = \mu_0 \frac{h}{l} \frac{C_0 U_0}{\sqrt{2ML_0}} = u. \quad (8)$$

В итоге мы имеем два полностью свободных от параметров безразмерных уравнения (7) и (8) с начальными данными, содержащими единственный параметр задачи u (он характеризует начальный заряд емкостного накопителя $C_0 U_0$). Конечно, есть еще один пока не учтенный параметр – конечная длина области ускорения объекта X_F , которая в безразмерных переменных даст нам конечное значение безразмерной индуктивности полезной нагрузки:

$$\lambda_F = \frac{L'}{L_0} = \frac{\mu_0}{L_0} \frac{h}{l} X_F. \quad (9)$$

Фактически нужно интегрировать нелинейную систему уравнений, пока переменная λ не достигнет заданного значения λ_F .

3. Результаты расчетов и оптимизация режима передачи энергии в нагрузку

Пример численного решения системы безразмерных уравнений (7)–(8) при разных значениях параметра u показаны ниже на Рис.2. Как видно, движение пластины и переменная индуктивная нагрузка сказывается нелинейным образом только при достаточно высоком уровне безразмерного параметра $u \sim 1$, что и следовало ожидать от безразмерной формулировки математической задачи.

Также видно, что высокие скорости пластины (скорость пропорциональна безразмерной производной $V = \dot{X} \sim \partial \lambda / \partial \tau$) достигаются при сравнительно больших λ , что в реальных ситуациях может оказаться весьма проблематичным, так как этот параметр равен отношению индуктивности полезной нагрузки L' к всей остальной индуктивности разрядного контура L_0 . Анализ показывает, что реалистичными оказываются лишь сравнительно небольшие длины рельсотрона $\lambda_F < 1$.

Для вычисления эффективности передачи энергии генератора в нагрузку удобно использовать безразмерное отношение S кинетической энергии объекта $0.5 \cdot M(V_F)^2$ на финальной стадии движения, к запасенной энергии в емкостном накопителе $0.5 \cdot C_0(U_0)^2$:

$$S = \frac{M V_F^2}{C_0 U_0^2} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right)_F^2 M L_0 \left(\frac{l/h}{\mu_0 C_0 U_0} \right)^2 = \frac{(\partial \lambda / \partial \tau)_F^2}{2u^2} \quad (10)$$

Если зафиксировать финальную величину λ_F (9), которая пропорциональна длине рельсотрона X_F (см. Рис.1), то можно вариацией начального заряда (параметра u) менять

эффективность S . Эти расчеты приведены на Рис.3. Пунктирной линией показана линейная зависимость $S_{max}(u)$ положения точек максимальной эффективности на координатной плоскости.

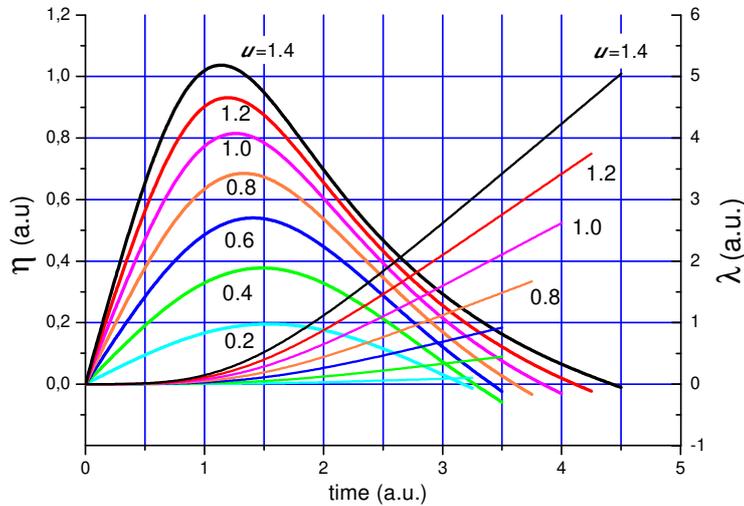


Рис.2. Зависимость первой полуволны тока в контуре (η) и смещения пластины (λ) от времени.

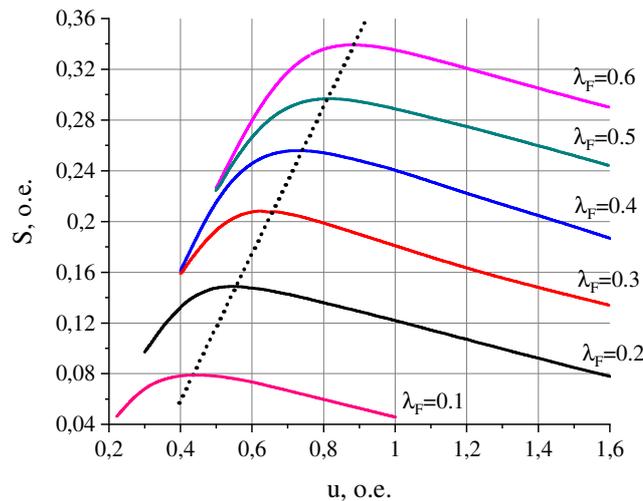


Рис.3. Зависимости эффективности передачи энергии в лайнер S от безразмерного параметра u при фиксированной финальной индуктивности объекта λ_F .

4. Выводы

Теоретический анализ показал, что эффективность S передачи электрической энергии ёмкостного накопителя в кинетическую энергию движущейся пластины определяется единственным безразмерным параметром задачи $u = \mu_0 C_0 U_0 (h/l) / (2ML_0)^{1/2}$, причём зависимость $S(u)$ имеет единственный максимум.

Благодарности

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по темам FWRM-2021-0001, FWRM-2021-0007.

5. Литература

- [1] Katzenstein J., *J. Appl. Phys.*, **52**, 676, 1981; doi: 10.1063/1.1702494
- [2] Oreshkin V.I., *Tech. Physics Letters*, **39** (8), 669, 2013; doi: 10.1134/S1063785013080117